数理解析研究所講究録
1509巻 2006年 81-99

Szegö kernel of Grauert tube in line bundle

平地 健吾 (阪大理)

§1. Fefferman のプログラム

この講演で述べる結果は, Fefferman [F2] において提案された研究プログラムに沿って得られたものである。まず,このプログラムの概略を説明する. 強擬凸領域のベルグマン核をリーマン多様体上の熱核の類似と見て, 対応する理論を作ろう, というのが彼のアイディアである. この対応を表にすると,

強擬凸領域, CR多様体 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $\partial\Omega$	リーマン多様体(コンパクト) (M, g)
$\bar\partial$, $\bar\partial_b$ 作用素	Δ_g ラプラス作用素
Szegö核, Bergman核	熱核 $H_t(x,y)$ $H_t(x,y) = \langle x \vert e^{-\Delta t} \vert y \rangle$
Feffermanの漸近展開 ($z \to \partial\Omega$ の挙動)	漸近展開 ($t \to 0$) $H_t(x,x) \sim t^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) t^j$
展開の係数は CR不変量	$a_j(x)$ は g の曲率の $O(n)$-不変式.
放物型不変式論	Weylの不変式論.
$\boxed{\quad ? \quad}$	指数定理

すでに多くの対応理論が与えられている。例えば[HK]を参照.

リーマン多様体上では、熱核の漸近展開の係数のM上での積分を考えることにより指数定理(ガウス-ボネ-チャーンの定理)が得られることが知られている。これに対応する理論が、強ギ凸領域に対しても構築できるのでは、と期待している.
以下では、とくにGrauert柱状領域の場合には、Szegö核がリーマン・ロッホの定理と密接に関係していることを説明する。

Grauert柱状領域を考える前に、まず一般の強ギ凸領域について成り立つ結果の説明をする.

§2. 大域的CR不変量(の候補)

X: $n+1$ 次元複素多様体.
$\Omega \subset X$: 強ギ凸領域, $\partial\Omega \in C^\infty$
ρ: Ω の定義函数, すなわち $\rho \in C^\infty(X, \mathbb{R})$
$d\rho \neq 0$ on $\partial\Omega$, $\Omega = \{\rho > 0\}$ となるもの.

$d\sigma$: $\partial\Omega$ 上の体積要素
$\mathcal{H}^2(\partial\Omega, d\sigma) := \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\partial\Omega, d\sigma)$
L^2 境界値をもつ Ω の正則函数全体のなすHilbert空間
とする. $\mathcal{H}^2(\partial\Omega, d\sigma)$ の完全正規直交系 $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^\infty$ をとるとき. 級数

$$S(z,w) := \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(w)}$$

は $\Omega \times \Omega$ で広義一様収束し, $S(z,w) \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ を定める. ($\{\varphi_j\}$ の選び方にはよらない).

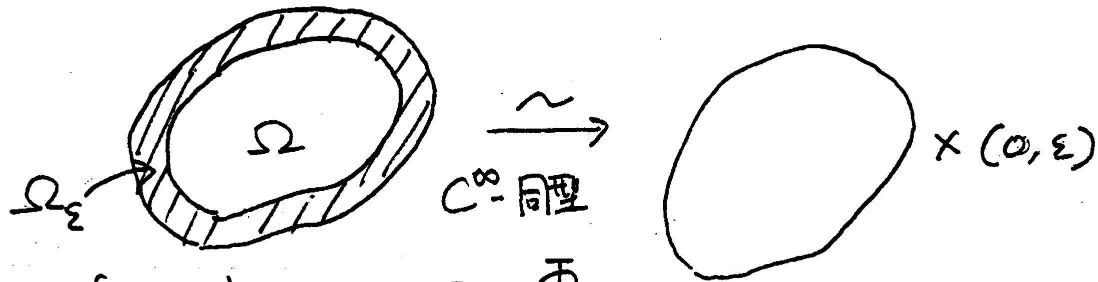
$S(z,w)$ を $(\partial\Omega, d\sigma)$ の Szegö 核という. さらに $\partial\Omega\times\partial\Omega$ への境界値を考えれば $S(z,w)\in\mathcal{D}'(\partial\Omega\times\partial\Omega)$ とみなすこともできる. このとき,

$$\mathcal{S} : L^2(\partial\Omega, d\sigma) \longrightarrow \mathcal{H}^2(\partial\Omega, d\sigma)$$

$$\mathcal{S}f(z) = \int_{\partial\Omega} S(z,w)\, f(w)\, d\sigma(w)$$

は直交射影になっている。

$S(z,z)$ は $z\to\partial\Omega$ のときに ∞ に発散する. その漸近展開を記述するために C^∞ 同型



$$\Omega_\varepsilon := \{z\in\Omega \mid 0<\rho(z)<\varepsilon\} \xrightarrow{\ \Phi\ } \partial\Omega \times (0,\varepsilon)$$

を一つ固定する. (選び方はたくさんある).
$\Phi(z) = (x,t) \in \partial\Omega\times(0,\varepsilon)$ を Ω_ε の局所座標とする.

<u>Theorem 1</u> (Fefferman [F1], Boutet-Sjöstrand [BS])
$t\downarrow 0$ のとき,

$$S(z,z) = S((x,t),(x,t)) \sim$$
$$a_0(x)t^{-n-1} + a_1(x)t^{-n} + \cdots + a_n(x)t^{-1} +$$
$$a_{n+1}(x)\log t + a_{n+2}(x)\,t\log t + \cdots + a_{n+1+j}(x)\,t^j\log t + \cdots$$

ここで各 $a_j(x) \in C^\infty(\partial\Omega)$，という漸近展開をもつ．

この展開を $x \in \partial\Omega$ について積分すると．

$$\int_{\partial\Omega} S((x,t),(x,t))\,d\sigma \sim c_0 t^{-n-1} + \cdots + c_n t^{-1} + c_{n+1}\log t + c_{n+2}\, t\log t + \cdots$$

ここで

$$c_j = \int_{\partial\Omega} a_j(x)\,d\sigma.$$ が成り立つ．一般に．

c_j は $(\partial\Omega, \rho, \Phi, d\sigma)$ に依存して決まる量であり，CR不変量ではない（$d\sigma, \rho, \Phi$ はCR structureとは関係のない量である）．ところが c_{n+1} だけは例外である．

<u>Theorem 2</u>　$c_{n+1}(\partial\Omega, d\sigma, \rho, \Phi)$ は $d\sigma, \rho, \Phi$ の選び方によらない．よって．$c_{n+1}(\partial\Omega)$ と書いてもよい．さらに，$\{\Omega_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を強ギ凸領域の C^∞ 族とするとき．

$$c_{n+1}(\partial\Omega_t) = \text{一定}$$

である．

<u>Note</u>　熱核の場合　n が偶数のとき．

$$\int_M a_{n/2}(x)\,dV_g = c\,\chi(M).$$

が成り立つ．ここで Δ_g は微分形式に対して考える．$\chi(M)$ はホモトピー不変量であり．Theorem 2 は．その対応物のように見える．

これで大域的不変量がみつかったようであるが、実は、

<u>問題</u>　$c_{n+1}(\partial\Omega) \neq 0$ となる領域 Ω は存在するのか？

は未解決である. Grauert 柱状領域での Szegö 核の計算を試みたのは、この問題が動機である. しかし

<u>Theorem 3</u>　Ω が Grauert 柱状領域（§5で定義する）に対しては　$c_{n+1}(\partial\Omega) = 0$.

となってしまう. この定理の証明のために、正線束に対する Tian の定理を復習する.

§4. Tianの定理

M : コンパクト n次元複素多様体
$L \longrightarrow M$: 正の複素線束, h : Lの fiber metric
$\omega = \mathrm{curv}(h)$: hの曲率テンソル. M上の $(1,1)$ form.
ケーラー型式になっている.
g : 対応するケーラー計量.
$dV_g := \frac{1}{n!}\omega^n$　: Mの体積要素.

とする. このとき、$H^0(M, L^{\otimes m})$ は有限次元である.
この空間の内積を

$$(s_1, s_2) := \int_M \langle s_1, s_2 \rangle_{h^{\otimes m}}\, dV_g$$

で定義する. $H^0(M, L^{\otimes m})$ の正規直交基底を $\{\varphi_j^m(z)\}_{j=1}^{d_m}$ とするとき、

$$B_m(z) := \sum_{j=1}^{d_m} \| \varphi_j^m(z) \|^2_{h^{\otimes m}} \in C^\infty(M)$$

を $L^{\otimes m}$ の Bergman核とよぶ（B_m は $\{\varphi_j^m\}$ の選び方によらない）.

<u>Theorem 4</u> (Tian [T], Zelditch [Z], Catlin [C])
$m \to \infty$ のとき,

$$B_m(z) \sim m^n \left(b_0(z) + b_1(z) m^{-1} + b_2(z) m^{-2} + \cdots \right)$$

ここで $b_j(z) \in C^\infty(M)$ は 計量 g の局所不変量.
とくに b_0 は 0でない定数であり, $B_m(z)$ は 一様に n 次のオーダーで増大する.

上式の両辺を M 上で積分すると,

$$\dim H^0(M, L^{\otimes m}) \sim m^n \sum_{j=0}^{\infty} m^{-j} \int_M b_j(z)\, dV_g$$

がえられる. 一方 m が十分大きなときには, 左辺は m の多項式 (Hilbert多項式) で与えられることが知られている. (下の Note 参照). これから とくに,

$$\int_M b_j(z)\, dV_g = 0 \quad \text{for} \quad j \geq n+1$$

が導かれる.

<u>Note 4.1</u> $m \gg 1$ のとき

$$\dim H^0(M, L^{\otimes m}) = \int_M Td(M) \wedge e^{m\omega}$$

であり, 右辺は 多項式である.

§5 Grauert 柱状領域

$L^* \to M$: L の dual bundle (L^* は負) とするとき、

$$\Omega := \{ v \in L^* \mid \|v\| < 1 \}$$

は強擬凸領域であり、これを Grauert 柱状領域という。
$\pi : \partial\Omega \to M$ は S^1-bundle である。$e^{i\theta}$ を局所ファイバー座標とするとき、

$d\sigma := d\theta \wedge \pi^* dV_g$ は $\partial\Omega$ の体積要素を与える。
$S(v,w)$ を $\mathcal{H}^2(\partial\Omega, d\sigma)$ の Szegö 核とする。

Ω の定義函数として $\rho = -\log\|v\|^2$ をとると、$\mathcal{H}^2(\partial\Omega, d\sigma)$ の S^1-不変性により、$S(v,v)$ の次のような展開がえられる。

<u>Lemma 5.1</u>　$\pi(v) = z$ とおくと

$$S(v,v) \sim a_0(z)\rho^{-n-1} + a_1(z)\rho^{-n} + \cdots + a_n(z)\rho^{-1} + a_{n+1}(z)\log\rho + a_{n+2}(z)\rho\log\rho + \cdots$$

ここで $a_j(z) \in C^\infty(M)$ は g の局所不変量である。

この展開の係数は Theorem 4 の展開の係数と次のような関係がある。

Theorem 5　$a_j(z)$ と $b_j(z)$ は次をみたす：

$$a_j(z) = (n-j)!\, b_j(z) \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

$$a_j(z) = \frac{(-1)^{j-n-1}}{(j-n-1)!} b_j(z) \qquad j \geqq n+1.$$

Cor　Grauert 柱状領域 Ω に対しては

$$c_j(\Omega) = \int_M a_j(z)\, dV_g = 0 \qquad \text{for } j \geqq n+1.$$

これは Theorem 3 を含んでいる.

Remark 5.1　Theorem 5 は次のように書くこともできる.

$$S(v,v) \sim \int_0^\infty e^{-t\rho(v,v)} \sum_{j=0}^\infty b_j(z) t^{n-j}\, dt$$

右辺に現われる amplitude function は $B_m(z)$ の展開の m を形式的に $t \in \mathbb{R}$ におきかえたものである.

両辺を M 上で積分すれば

$$\sum_{j=0}^n c_j \rho^{j-n-1} = \int_0^\infty e^{-t\rho} h(t)\, dt,$$

ここで $h(t)$ は L の Hilbert 多項式，を云える.

§6. Theorem 5の証明

$$\mathcal{H}^2_m(\partial\Omega) := \{ f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega) \mid f(e^{i\theta}v) = e^{im\theta} f(v),\ \forall\theta \}$$

とおくと $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ の分解

$$\mathcal{H}^2(\partial\Omega) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}^2_m(\partial\Omega)$$

がえられる。これは $\partial\Omega$ 上の函数の各fiberでのFourier展開である。さらに各 m に対して

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^2_m(\partial\Omega) & \cong & H^0(M, L^{\otimes m}) \\ \Psi & & \Psi \\ f(v) = \langle \varphi(\pi(v)), v^{\otimes m} \rangle & \longleftrightarrow & \varphi(z) \end{array}$$

は内積空間の同型を与える。よって関係式

$$B_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} e^{-im\theta} S(e^{i\theta}v, v)\, d\theta \tag{6.1}$$

をえる。

<u>Note</u> Ω の Bergman核 $B(v,v)$ に対しては

$$B_m(z) = \frac{1}{2\pi m} \int_{S^1} e^{-im\theta} B(e^{i\theta}v, v)\, d\theta$$

が成り立つ。[C] 参照。

$\rho(v)$ の almost analytic extension を $\rho(v,v)$ とすると.

$$\rho(e^{i\theta}v, v) = -\log e^{i\theta}\|v\|^2$$
$$= -i\theta - \log\|v\|^2 = -i\theta \quad \text{on } \partial\Omega.$$

一方.
$$(-i\theta)^{-k} = \frac{2\pi}{(k-1)!}\left(\frac{1}{i}\partial_\theta\right)^{k-1}\delta(\theta) \qquad k \geqq 1$$
$$(-i\theta)^k \log\theta = 2\pi(-1)^{k+1}k!\left(\frac{1}{i}\partial_\theta\right)^{-k-1}\delta(\theta) \qquad k \geqq 0$$

ここで $\delta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-i\theta}$. よって

$$S(e^{i\theta}v, v) \sim \sum_{j=0}^{n} a_j(z)\,(-i\theta)^{j-n-1}$$
$$+ \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j(z)\,(-i\theta)^{j-n-1}\log\theta$$
$$= 2\pi\, B\left(z, \tfrac{1}{i}\partial_\theta\right)\delta(\theta)$$

ここで
$$B\left(z, \tfrac{1}{i}\partial_\theta\right) = \sum_{j=0}^{n}\frac{a_j(z)}{(n-j)!}\left(\frac{1}{i}\partial_\theta\right)^{n-j}$$
$$+ \sum_{j=n+1}^{\infty}(-1)^{j-n-1}(j-n-1)!\,a_j(z)\left(\frac{1}{i}\partial_\theta\right)^{j-n-1}$$

従って,
$$\frac{1}{2\pi}\int_{S^1} e^{-im\theta} S(e^{i\theta}v, v)\,d\theta = \int_{S^1} e^{-im\theta} B\left(z, \tfrac{1}{i}\partial_\theta\right)\delta(\theta)\,d\theta$$
$$= \int_{S^1}\delta(\theta)\,B(z, i\partial_\theta)\,e^{-im\theta}\,d\theta$$
$$= B(z, i\partial_\theta)\,e^{-im\theta}\Big|_{\theta=0}$$
$$= B(z, m).$$

よって (6.1) により

$$m^n \sum_{j=0}^{\infty} b_j(z)\, m^{-j} = B(z, m).$$

m^{n-j} の係数をくらべると Theorem 5 がえられる。

(上記の計算は $\theta=0$ で microlocal に、あるいは $m\to\infty$ のときの漸近展開として意味がある。)

<u>Note</u> Remark 5.1 は

$$\mathrm{pf.}\int_0^{\infty} e^{-t\rho} t^m\, dt = \begin{cases} m!\,\rho^{-m-1} & m \geq 0 \\ \dfrac{(-1)^m}{(-m-1)!}\rho^{-m-1}\log\rho & m < 0 \end{cases}$$

から導かれる。

§7. 柏原の解析

Szegö 核および $B_m(z)$ の計算には柏原による再生核の単純ホロノミー系による特徴付けが非常に有用である。
実際、前§の $B(z,m)$ はミクロ微分作用素環を用いて代数的に求めることができる。
まず柏原の結果 [K] を復習する。

Ω : 強ギ凸領域, $\partial\Omega \in C^{\omega}$
$\rho(z,\bar{z})$: Ω の定義函数の複素化.
$B_{\Omega}(z,\bar{z})$: Ω の Bergman 核とする.

Theorem 6 (柏原 [K])

$$(7.1)\quad \left(P(z,\partial_z)-Q(\bar z,\partial_{\bar z})\right)\log\rho(z,\bar z)=0$$

をみたす すべてのミクロ微分作用素 $P(z,\partial_z), Q(\bar z,\partial_{\bar z})$
に対して

$$(7.2)\quad \left(P^*(z,\partial_z)-Q^*(\bar z,\partial_{\bar z})\right)B_\Omega(z,\bar z)=0$$

が成り立つ. ここで "$*$" は formal adjoint.

P, Q が動くとき, (7.2) は B_Ω を特徴付ける単純ホロノミー系を与える. Szegö 核に対しては

Theorem 6′

$$(7.3)\quad \left(P(z,\partial_z)-Q(\bar z,\partial_{\bar z})\right)\delta(\rho(z,\bar z))=0$$

ならば

$$(7.4)\quad \left(P^*(z,\partial_z)-Q^*(\bar z,\partial_{\bar z})\right)S_\Omega(z,\bar z)=0$$

が成り立つ.

よって核函数の計算は, ホロノミー系の解の構成に帰着することができる. Boutet de Monvel は, その方法として, 無限階のミクロ微分作用素を用いた公式を与えた.

$$\rho_0 = z_0+\bar z_0+|z'|^2 \qquad z'=(z_1,\cdots,z_n),\ z=(z_0,z').$$

$\{\rho_0=0\}$ は Siegel 領域 Ω_0 の境界であり, その Bergman 核 B_{Ω_0} は

$$B_{\Omega_0}(z,\bar{z}) = \text{const.}\ \rho_0^{-n-2}$$

で与えられる．一般の領域は、局所座標をとりかえることにより、$z=0$ の近傍で

$\bar{z}_n$ を含まない!

$$\partial\Omega = \{\rho(z,\bar{z}) = \rho_0(z,\bar{z}) + F(z,\bar{z}') = 0\}$$

ここで $F(z,\bar{z}') = O(|z|^3)$, という表示をもつ.

<u>Theorem 7</u> (Boutet の公式 [B])

$$A(z,\partial_z)\log\rho_0 = \log\rho$$

をみたす無限階ミクロ微分作用素がただ一つ存在し、

$$B_\Omega(z,\bar{z}) = (A^*)^{-1}(z,\partial_z)\,B_{\Omega_0}(z,\bar{z})$$

が成り立つ. さらに $A(z,\partial_z)$ の total symbol は

$$A(z,\zeta) = e^{-H(z,\zeta'/\zeta_n)\zeta_n}$$

$\zeta' = (\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ で与えられる.

Szegö核でも同様な公式がえられるが少し複雑になる. 無限階ミクロ微分作用素の'意味'については[HKN]を参照.

Boutetの公式(のSzegö核version)を用いてGrauert柱状領域のSzegö核を計算する.

<u>Step 1</u> 座標のとり方.

$p \in M$ をとり, pの近傍UでのGeodesic標準座標 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ をとる. $L^*|_U$ の零点をもたないsection eをとり.

$$L^*|_U \cong \mathbb{C}\times U$$

$$v=\lambda e(z) \longleftrightarrow (\lambda, z)$$

により, $L^*|_U$ の座標を作る. $h(z):=\|e(z)\|^2$ とおくと

$$-\rho = \log\|v\|^2 = \log|\lambda^2|\,h(z)$$

$$= \log\lambda + \log\bar{\lambda} + \log h(z).$$

さらに

$$g_{i\bar{j}} = \partial_{z_i}\partial_{\bar{z}_j}\log h = \delta_{ij} + O(|z|^2)$$

に注意すれば, $z_0=\log\lambda$ とおくとき,

$$-\rho = z_0+\bar{z}_0+|z|^2+H(z),$$

ここで $H(z)=O(|z|^4)$が成り立つ. ($z=(z_1,\cdots,z_n)$, z_0を含まない)
以下では HはC^ωと仮定し, $H(z,\bar{z})$と書く.

$$\partial\Omega=\{z_0+\bar{z}_0+|z|^2+H(z,\bar{z})=0\}$$

でのSzegö核を計算する.

Step2 Boutetの公式.

Boutetの公式のSzegö核版をΩに適用すると

$$A(z_0, z; \zeta_0, \zeta) \equiv \det g_{i\bar{j}}(z, \zeta/\zeta_0) \cdot e^{H(z,\zeta/\zeta_0)\zeta_0}$$
$\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$

となる. ここで $\det g_{i\bar{j}}(z, \bar{z})$ は $\det g_{i\bar{j}}$ の複素化であり,
$d\sigma = d\theta \wedge \pi^* dV_g$ の選び方に対応して決まる項である.

$A(z_0, z; \partial_{z_0}, \partial_z)$は無限階のミクロ微分作用素であり

$$S = c A^{*-1} (z_0 + \bar{z}_0 + |z|^2)^{-n-1}$$

が成り立つ. cは定数. A^{*-1} は z_0 変数に依存しないので A^{*-1} の total symbol を $A^{*-1}(z; \zeta_0, \zeta)$ とおくと
§6 での $B(p, m)$ は

(7.5) $$B(p, m) = A^{*-1}(0; m, 0)$$

で与えられる.

Remark 微分作用素のウエイト w を

$$w(z) = 1, \quad w(z_0) = 2$$
$$w(\partial_z) = w(\zeta) = -1, \quad w(\zeta_0) = w(\partial_{z_0}) = -2$$

とおくと $A(z; \partial_{z_0}, \partial_z)$ は有限階のミクロ微分作用素のウェイト $\to \infty$ の漸近級数とみなすことができる.
A^{*-1} は各ウェイトで切れば通常のミクロ微分作用素の演算で与えられる.

公式 (7.5) を用いて b_j に現われる，曲率に関して一次の項を計算する．

<u>Proposition</u>　Theorem 4 の展開の係数は，$b_0=1$ となるように正規化したとき，$l \geq 1$ に対して

$$b_l = \frac{\Delta_g^{l-1} S_g}{(l+1)(l-1)!} + (\text{曲率について2次以上の項})$$

ここで S_g はスカラー曲率，Δ_g は g のラプラシアン

<u>証明</u>　まず $\det g_{i\bar{j}}$ の中の H についての一次の項を見ると．

$$\det g_{i\bar{j}}(z,\bar{z}) = 1 + \Delta H(z,\bar{z}) + [2]$$

ここで $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}$，$[2]$ は H について2次以上の項．
これを用いると

$$A(z;\zeta_0,\zeta) = \det g_{i\bar{j}}(z,\zeta/\zeta_0)\, e^{H(z,\zeta/\zeta_0)\zeta_0}$$

$$= \left(1+(\Delta H)(z,\zeta/\zeta_0)\right)\left(1+H(z,\zeta/\zeta_0)\zeta_0\right)+[2]$$

$$= 1 + H(z,\zeta/\zeta_0)\zeta_0 + (\Delta H)(z,\zeta/\zeta_0) + [2]$$

A の formal adjoint は

$$A^*(z;\zeta_0,\zeta) = e^{\sum_{j=0}^{n} \partial_{\zeta_j}\partial_{\zeta_j}} A(z;-\zeta_0,-\zeta)$$

で与えられる．一般に，$z,\bar{z}$ の関数 $F(z,\bar{z})$ に対し．

$$\sum_{j=0}^{n} \partial_{z_j}\partial_{\zeta_j} F(z,\zeta/\zeta_0) = \frac{\Delta}{\zeta_0} F(z,\bar{z})\Big|_{\bar{z}=\zeta/\zeta_0}$$

に注意すると．

$$A^*(z,\zeta_0,\zeta) = e^{\zeta_0^{-1}\Delta}\left(\det g_{i\bar{j}}(z,\bar{z})\, e^{-H(z,\bar{z})\zeta_0}\right)\Big|_{\bar{z}=\zeta/\zeta_0}$$

$$= e^{\zeta_0^{-1}\Delta}\left(1 - H(z,\bar{z})\zeta_0 + \Delta H(z,\bar{z})\right)\Big|_{\bar{z}=\zeta/\zeta_0} + [2]$$

$$= e^{\zeta_0^{-1}\Delta}\left(1 - \zeta_0(1-\zeta_0^{-1}\Delta)H(z,\bar{z})\right)\Big|_{\bar{z}=\zeta/\zeta_0} + [2]$$

$$= 1 \mp \zeta_0\left(1 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1-l}{l!}\left(\frac{\Delta}{\zeta_0}\right)^l\right)H\Big|_{\bar{z}=\zeta/\zeta_0} + [2]$$

よって

$$A^{*-1}(0;\zeta_0,0) = 1 + \zeta_0\left(1 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1-l}{l!}\left(\frac{\Delta}{\zeta_0}\right)^l\right)H(0,0) + [2]$$

$$= 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1-l}{l!}\,\Delta^l H(0,0)\,\zeta_0^{1-l} + [2]$$

ここで

$$\Delta^l H(0,0) = -\Delta_g^{l-2} S_g(p) + [R^2]$$

ここで $[R^2]$ は曲率テンソルの成分の2次以上の多項式，を用いて

$$A^{*-1}(0;\zeta_0,0) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{(l+1)!}\,\Delta_g^{l-1} S_g(p)\,\zeta_0^{-l} + [R^2]$$

よって (7.5) により Prop がえられる

Note 一般に

$$H(z,\bar{z}) = -\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}} \frac{1}{p!\,q!} R_{\alpha\bar{\beta}}\, z^{\alpha}\bar{z}^{\beta} + [R^2]$$

ここで $R_{\alpha\bar{\beta}}$ は $\nabla^{p-2}\bar{\nabla}^{q-2}R$ の成分である.

曲率に関する2次以上の項も公式(7.5)を用いて計算することができる. b_1, b_2, b_3 については Lu によってえられた結果がすでにある.

<u>Theorem</u>(Lu[L])

$$b_1 = \frac{1}{2} S,$$

$$b_2 = \frac{1}{3}\Delta S + \frac{1}{24}(\|R\|^2 + 3S^2 - 4\|Ric\|^2)$$

$$b_3 = \frac{1}{8}\Delta^2 S + (11\text{項}).$$

Lu の計算は Tian による peak section method を精密化したものであり, Szegö 核は用いていない. 彼の計算は30ページを越える複雑なものである.

代数解析を用いた計算は非常に効率がよい.
公式(7.5)から b_j の一般的な表示を求めることは, 原理的には可能であるが, 結果は複雑であり, 意味があるとは思えない. (7.5)から直接, 幾何的あるいは不変式論的な性質を導くのがこれからの課題である.

参考文献

[B] L. Boutet de Monvel: Complément sur le noyau de Bergman, Séminaire EDP, École Polytech. Exposé n° XX, 1985–86

[BS] L.Boutet de Monvel and J.Sjostrand: Sur la singularite des noyaux de Bergman et de Szego, Asterisque 34-35 (1976), 123-164.

[C] D. Catlin: The Bergman Kernel and a Theorem of Tian, in "Analysis and Geometry in Several Complex Variables", Trends in Math., Birkhauser, 1999.

[F1] C. Fefferman: The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, Invent. Math. **26** (1974), 1–65.

[F2] C. Fefferman: Parabolic invariant theory in complex analysis, Adv. in Math. **31** (1979), 131–262.

[HK] K. Hirachi and G. Komatsu: Invariant theory of the Bergman kernel, in "CR-Geometry and Overdetermined Systems" Advanced Studies in Pure Mathematics **25**, 167–220, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1997.

[HKN] K. Hirachi, G. Komatsu, and N. Nakazawa: CR Invariants of Weight Five in the Bergman Kernel, Adv. in Math. **143**, 185-250, 1999

[K] M. Kashiwara: Analyse micro-locale du noyau de Bergman, Séminaire Goulaouic-Schwartz, École Polytech. Exposé n° VIII, 1976–77

[L] Zhiqin Lu: On the Lower Order Terms of the Asymptotic Expansion of Zelditch, to appear in Amer. J. Math. e-print: math/9811126

[T] G. Tian: On a Set of Polarized Kähler Metrics on Algebraic Manifolds, J. Diff. Geom. **32**, 99–130, 1990.

[Z] S. Zelditch: Szegö Kernel and a Theorem of Tian, Internat. Math. Res. Notices **6**, 317–331, 1998.